

④ Zusammenhang mit Analysis I:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ rektifizierbar} \\ \iff \gamma_1, \dots, \gamma_n \in BV([a, b]) \end{array} \right.$$

(Verweis auf ③: nicht jede stetige Fkt. ist BV!)

← Lektion 16

Bei diff'baren Kurven ist nun alles in Ordnung!

Satz 17.1

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 . Dann gilt für die Länge L von γ bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$

$$L = L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

C^1 -Kurven sind also rektifizierbar.

Bem: Man sieht, wie die Länge von $\|\cdot\|$ abhängt

Beweisidee (Details Skript)

$$\text{Sei } \mathcal{Z}_m = \left\{ t_i : t_i = a + \frac{i}{m}(b-a), \right. \\ \left. i = 0, \dots, m \right\}$$

(Zerlegung von $[a, b]$ mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{m}$)

$$\text{Es gilt } L(\mathcal{Z}_m) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\| \left(\gamma(t_{i-1} + h) - \gamma(t_{i-1}) \right) \frac{1}{h} \right\| h$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\gamma(t_{i-1} + h) - \gamma(t_{i-1})}{h} \right\| (t_i - t_{i-1})$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$



Beispiel: (nimmt bzgl. Euklidischer Norm) -240-

$$\textcircled{1} \quad \gamma(t) := e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \implies$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |i e^{it}| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

$$\textcircled{2} \quad \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (t, f(t))$$

$$\text{mit } f \in C^1([a, b]) \implies$$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |(1, f'(t))| dt =$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

$$\textcircled{3} \text{ Schraubenlinie } \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma(t) := (r \cos t, r \sin t, ct) \text{ mit } r > 0, c \neq 0$$

$$\implies L(\gamma) = \int_a^b |(-r \sin t, r \cos t, c)| dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{r^2 + c^2} dt = \sqrt{r^2 + c^2} (b - a).$$

Umparametrisierung nach der Bogenlänge:

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei reguläre C^1 -Kurve,
also $\gamma'(t) \neq 0$ überall. Auf $\mathbb{R}^n$
betrachten wir irgendeine Norm $\|\cdot\|$ und
definieren die Bogenlängenfunktion

$$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\sigma(t) := \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$$

Wegen $\|\gamma'(u)\| > 0$ ist $\sigma'(t) > 0$,

also σ streng wachsend mit

$$\sigma([a, b]) = [0, L],$$

$$L := L(\gamma)$$

Def : Die Kurve $\beta: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$\beta(s) := \gamma(\bar{\sigma}^{-1}(s))$, heißt die

Umparametrisierung von γ nach der Bogenlänge.

- γ und β haben dieselbe Spur und den gleichen Durchlaufsin.

- $\|\beta'(s)\| \equiv 1 \quad \forall s \in [0, L],$

denn: $\beta'(s) = \frac{d}{ds} (\gamma \circ \bar{\sigma}^{-1})(s) =$

$$\gamma'(\bar{\sigma}^{-1}(s)) \frac{1}{\bar{\sigma}'(\bar{\sigma}^{-1}(s))} = \gamma'(\bar{\sigma}^{-1}(s)) \frac{1}{\|\gamma'(\bar{\sigma}^{-1}(s))\|}$$



Die Geometrie regulärer Raumkurven

ab jetzt : $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

reguläre Kurve mindestens C^2 ; auf

$\mathbb{R}^3$ betrachte die Euklidische Metrik

o. E. : γ bereits nach Bogenlänge para-
metrisiert, also $[a, b] = [0, L]$ und

$$|\gamma'| \equiv 1$$

Wie misst man die Krümmung von γ ?

Klassische Notation:

$$t(s) := \gamma'(s), s \in [0, L]$$

Tangentenvektor

„Krümmung“ : anschaulich $\hat{=}$ Änderungsrate
von $\pm$, mathematisch :

$$\kappa(\rho) := |\dot{\pm}(\rho)|$$

(die Krümmung von γ zur Zeit $\rho \in [0, L]$)

offenbar : 1.) $\kappa \equiv 0$ auf einem Teilintervall
 $\iff \gamma$ ist dort „gerade“ *Strecke*

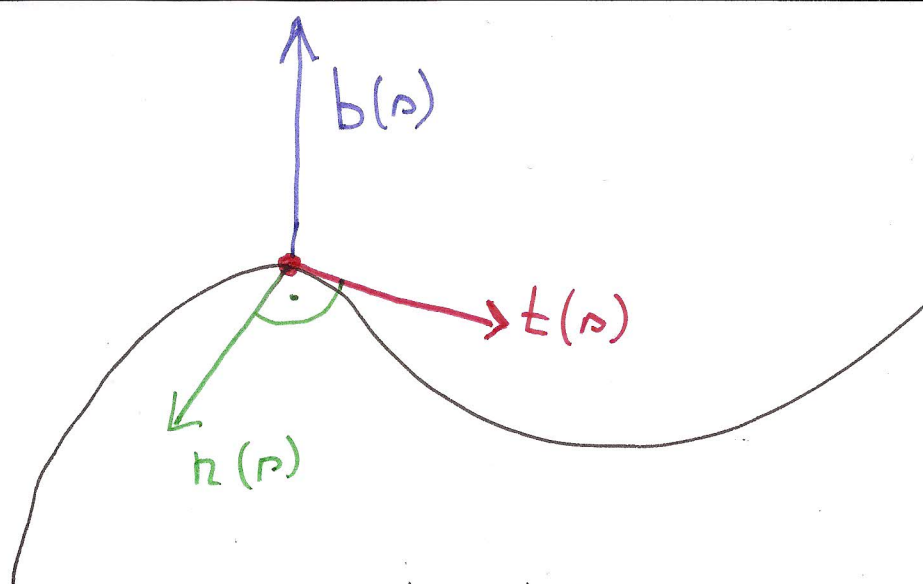
2.) $\alpha : [0, 2\pi r] \ni t \mapsto r e^{it/r}$

ist die nach Bogenlänge parametrisierte
Kreislinie mit Radius $r > 0$; es gilt:

$$\kappa \equiv 1/r$$

Wegen 1.) fordern wir ab jetzt:

$$\kappa(\rho) > 0 \quad \forall \rho \in [0, L]$$



Normalenvektor: $n(s) := \frac{t'(s)}{|t'(s)|} =$

$$\frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

es gilt: i) $|n| \equiv 1$, $t \perp n$,

denn $0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} (t(s) \cdot t(s)) =$

$$2 t(s) \cdot t'(s) = 2 \kappa(s) t(s) \cdot n(s)$$

ii)

①

$$t'(s) = \kappa(s) n(s)$$

1te Frenet'sche Formel

[Signature]

Binormalenvektor : $b(s) := t(s) \times n(s)$

es gilt: i) $|b(s)| = 1$, $b(s) \perp$
zu $t(s), n(s)$

ii) $t(s), n(s), b(s)$ ist positiv
orientierte ONB von $\mathbb{R}^3$, genannt
Frenet'sches 3 Bein $\left[\begin{array}{c} \det(t, n, b) \\ > 0 \end{array} \right]$
(Reihenfolge! t, n, b)

Die Frenet'schen Formeln 2 und 3:

Wir berechnen "Produktregel"

$$b'(s) = \frac{d}{ds} (t(s) \times n(s)) \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \stackrel{①}{=}$$

$$x(s) n(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s)$$

$$\Rightarrow b'(s) = t(s) \times n'(s)$$

$$\Rightarrow b'(s) \perp t(s);$$

gleichzeitig: $b(s) \cdot b(s) \equiv 1 \Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{ds} (b(s) \cdot b(s)) = 2b(s)b'(s)$$

$$\Rightarrow b'(s) \perp b(s);$$

Da $t(s), n(s), b(s)$ eine ONB ist, folgt:

Es gibt genau eine Funktion

$$\tau: [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\textcircled{3} \quad b'(s) = \tau(s) n(s)$$

Berechnung von $r'(s)$:
 (benutze $b := t \times n \implies b \times t = n$)

$$r'(s) = \frac{d}{ds} (b(s) \times t(s)) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s)$$

$$\stackrel{\textcircled{1}, \textcircled{3}}{=} \tau(s) \underbrace{n(s) \times t(s)}_{= -b(s)} + \kappa(s) \underbrace{b(s) \times n(s)}_{= -t(s)}$$

$\implies$

Satz (Formeln von Frenet) Sei $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$
nach Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung
 $0 < \kappa$, Torsion τ und Frenet'schem 3 Bein
 (t, n, b) . Dann gilt:

$$t' = \kappa n$$

$$n' = -\kappa t - \tau b$$

$$b' = \tau n$$

Das ist ein lineares System gewöhnlicher
Differentialgleichungen für $(t, n, b): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

„Umkehrung“: gegeben seien ein

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Startpunkt } \gamma_0 \in \mathbb{R}^3, \text{ eine pos. O.N.B.} \\ (t_0, n_0, b_0) \text{ von } \mathbb{R}^3, \text{ eine Fkt. } \tilde{\alpha}: \\ [0, L] \rightarrow (0, \infty) \text{ und eine Fkt. } \tilde{\tau}: \\ [0, L] \rightarrow \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge
parametrisierte Kurve $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(0) = \gamma_0, \quad t(0) = t_0, \quad n(0) = n_0, \quad b(0) = b_0 \\ \text{und } \alpha = \tilde{\alpha}, \quad \tau = \tilde{\tau}. \end{array} \right.$$

Hierzu braucht man einen tiefen Satz über
gewöhnliche Differentialgleichungen. $\Rightarrow \underline{\underline{\S 22}}$